Esercizio 1 : istruttivo per gli integrali doppi.

Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

Soluzione (da Analisi II)

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < +\infty$$

Recall (Analisi I)

e^{-x^2} è PARI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

per $x \geq 1$ si ha $x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x$

$\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$ e quindi:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \left(-e^{-x}\right)\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge.

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)}_{\text{numero}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dx\,dy =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}}_{\iint_{\mathbb{R}^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \circledast$$

"quando trovo x^2+y^2 devo pensare alle coordinate polari"

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

$x^2+y^2 = \rho^2$

Il dominio di integrazione è $\mathbb{R}^2$ che si può scrivere in termini di ρ e θ come

$$\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\pi)\}$$

$$\circledast = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\,\underbrace{\rho}_{\substack{\text{determinante dello}\\ \text{Jacobiano (del cambio di variabili)}}}\,d\rho\,d\theta =$$

$$\int g'(x)\,f(g(x))\,dx = F(g(x)) + c$$

dove F è una primitiva di f

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \underbrace{(-2\rho)}_{\frac{d}{d\rho}(-\rho^2)} e^{-\rho^2} d\rho \right) d\theta =$$

$f(x) = e^x$

$g(x) = -x^2$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} g'(\rho) \, f(g(\rho)) \, d\rho \right) d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(F(g(\rho)) \Big|_0^{+\infty} \right) d\theta =$$

F è una primitiva di f $\left(F(x) = e^x \right)$

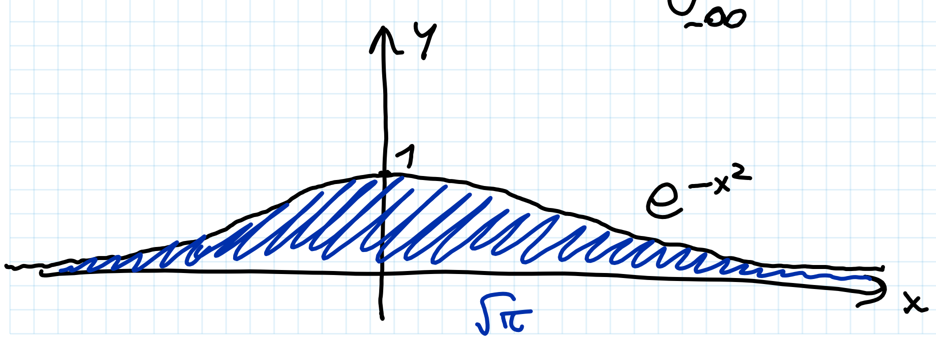
$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(e^{-\rho^2} \Big|_0^{+\infty} \right) d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (0 - 1) \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\theta =$$

$$= \pi$$

$$I^2 = \pi \implies I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = +\sqrt{\pi}$$



$$\int g'(x)\, f(g(x))\, dx = F(g(x)) + c$$

dove F è una primitiva di f.

Ricordando questa formula, si possono ottenere quelle viste la volta scorsa: $f(x) = x^{\alpha}$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, & \alpha \neq -1 \\ \log|x| + c, & \alpha = -1 \end{cases}$$

Infatti:

$$\int g'(x) \left(g(x)\right)^{\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{g(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, & \alpha \neq -1 \\ \log|g(x)| + c, & \alpha = -1 \end{cases}$$

Ancora: $g(x) = x \implies g'(x) = 1$

$$\int x^{\alpha} dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, & \alpha \neq -1 \\ \log|x| + c, & \alpha = -1 \end{cases}$$

Esercizio (11/01/23)

5. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' - u = e^{-t} \quad .$$

Soluzione

(1) Considero l'eq. omogenea associata

$$u'' - u = 0 \, .$$

Equazione "caratteristica" associata: $\lambda^2 - 1 = 0$

$$\lambda = \pm 1$$

$$u(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$$

[al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, queste sono tutte e sole le soluzioni di $u'' - u = 0$.]

(2) Cerco una soluzione particolare.

$$u''(t) - u(t) = e^{-t} = e^{\underline{(-1)} \cdot t}$$

↳ è soluzione dell'equazione caratteristica $\lambda^2 - 1 = 0$

dobbiamo provare con

$$u_0(t) = a \cdot t^{m} e^{-t}$$

$m =$ molteplicità di -1 in $\lambda^2 - 1 = 1$

$$u_0(t) = a t e^{-t}$$

vogliamo trovare il valore di $a \in \mathbb{R}$ "giusto"

$$u_0'(t) = -a t e^{-t} + a e^{-t} = -u_0(t) + a e^{-t}$$

$$u_0''(t) = -u_0'(t) - a e^{-t} =$$

$$= a t e^{-t} - a e^{-t} - a e^{-t} =$$

$$= a t e^{-t} - 2 a e^{-t}$$

$$u_0''(t) - u_0(t) = \cancel{a t e^{-t}} - 2a e^{-t} - \cancel{a t e^{-t}} = -2a e^{-t}$$

Imponendo $u_0''(t) - u_0(t) = e^{-t}$

si ottiene $-2a e^{-t} = e^{-t} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$

La soluzione particolare è quindi $u_0(t) = -\frac{1}{2} t e^{-t}$.

La soluzione generale è allora

$$u(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} t e^{-t}.$$

[Al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, queste sono tutte e sole le soluzioni di $u'' - u = e^{-t}$.]

Esercizio $u''(t) - 2u'(t) + u(t) = e^t$

Soluzione

(1) omogenea associata: $u'' - 2u' + u = 0$

eq. caratteristica associata: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda = 1$$

La soluzione dell'omogenea associata è

$u(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$ formula "nota"

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(2) Soluzione particolare

e^t : [IDEA: provo con $a e^t$ NO (è soluzione dell'omogenea)
provo con $a t e^t$ NO (" ")
provo con $a t^2 e^t$]

Chi è la molteplicità di 1 in $\underbrace{\lambda^2 - 2\lambda + 1}_{(\lambda-1)^2}$?

$m = 2$ ma il nostro Tentativo è $u_0(t) = a t^2 e^t$ Come mai?

$u_0'(t) = a\, 2t e^t + a t^2 e^t$

$u_0''(t) = 2a e^t + 2a t e^t + a\, 2t e^t + a t^2 e^t =$
$= 2a e^t + 4a t e^t + a t^2 e^t$

imponiamo che valga $u_0'' - 2u_0' + u_0 = e^t$

$$u_0'' - 2u_0 + u_0 = 2a\, e^t + 4at\, e^t + at^2 e^t + \\ -2(2ate^t + a t^2 e^t) + \\ + a t^2 e^t =$$

$$= 2a\, e^t + \cancel{4at\, e^t} + a\cancel{t^2}e^t + \\ -\cancel{4ate^t} - 2a\cancel{t^2}e^t + a\cancel{t^2}e^t =$$

$$= 2ae^t$$

vogliamo $= e^t$, quindi $a = \dfrac{1}{2}$

$$u_0(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t$$

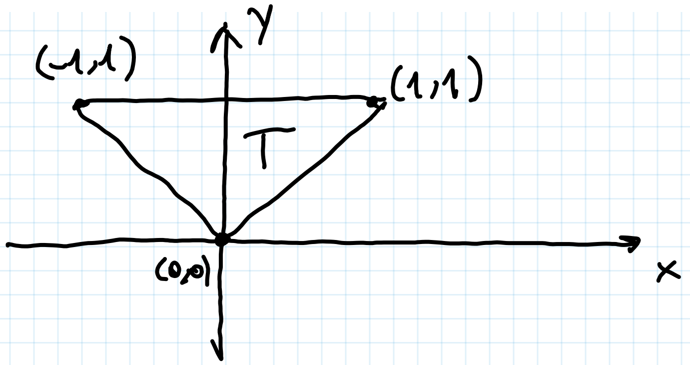
$\Rightarrow$ la soluzione generale di $u'' - 2u' + u = e^t$ è

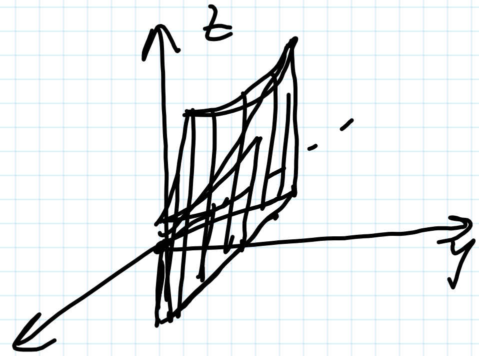
$$u(t) = c_1 e^t + c_2 t\, e^t + \frac{1}{2} t^2 e^t \, , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

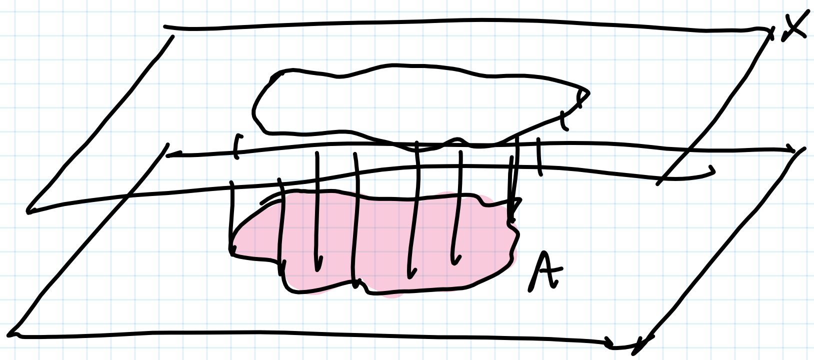
11/01/23.

4. Sia T il triangolo di vertci $(1,1)$, $(-1,1)$, $(0,0)$. Calcolare il volume del solido

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in T,\ 0 \le z \le y^2 - x^2\} .$$







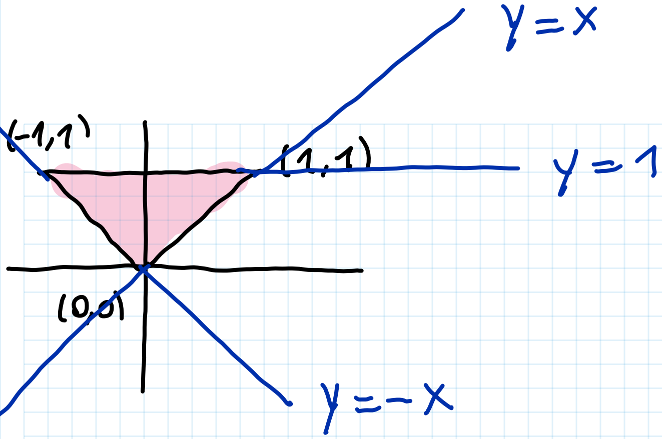
$$\text{Area} = \iint_A 1 \, dx\,dy$$

$$\text{Volume} = \iiint_V 1 \cdot dx\,dy\,dz$$

L'idea è quella di scrivere questo integrale come

$$\iint_T \left(\int_0^{y^2-x^2} dz \right) dx\,dy$$

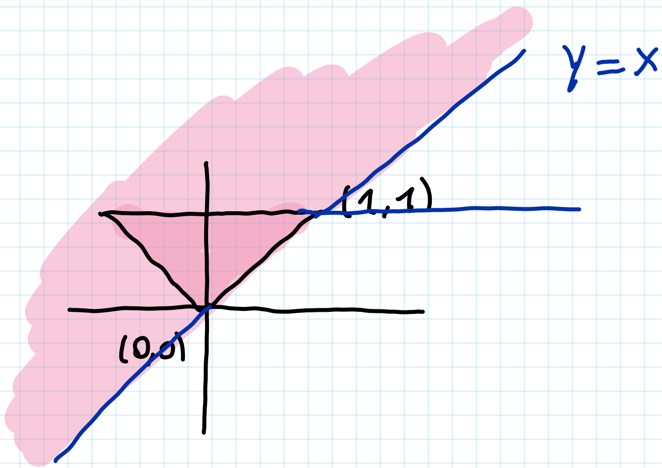
Dobbiamo parametrizzare il Triangolo T in Termini delle coordinate cartesiane x e y.



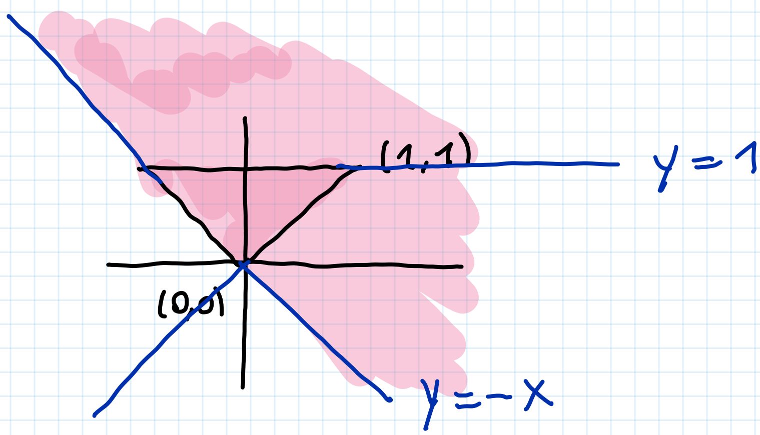
Parametrizziamo "un pezzo alla volta":

1)

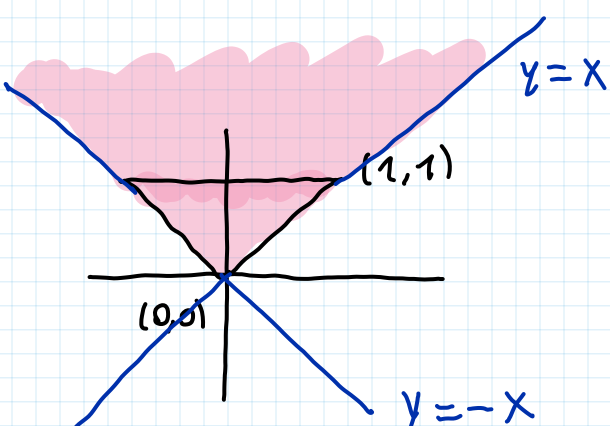
$y \geq x$



2) $y \geq -x$



• 1) intersecato 2) è



1) $y \geq x$

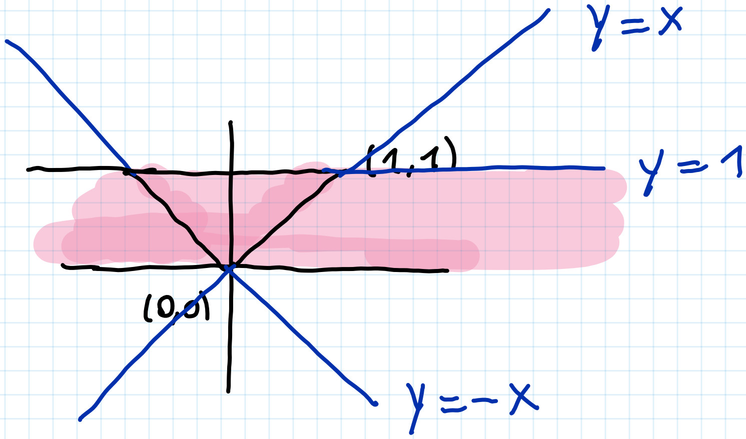
2) $y \geq -x$ $\rightsquigarrow$ $y \geq |x|$

Oppure, in termini di x :

1) $x \leq y$ 2) $x \geq -y$

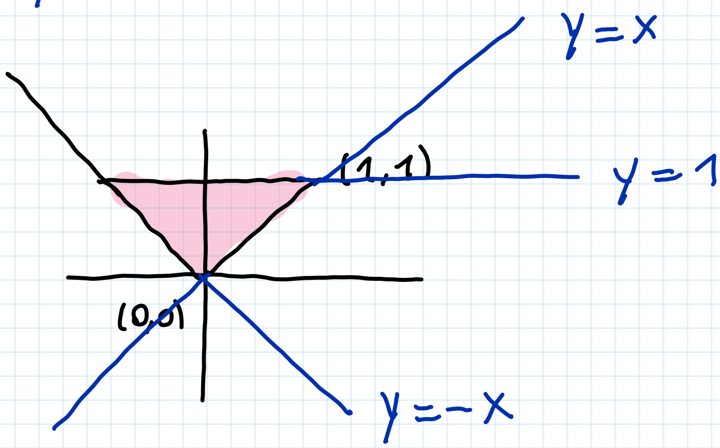
$\rightsquigarrow$ $-y \leq x \leq y$

3) $0 \leq y \leq 1$



$\underbrace{1) \cap 2)}_{-y \leq x \leq y} \cap 3)$:

$0 \leq y \leq 1$



$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y \leq x \leq y \, , \quad 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$$

Il volume è :

$$\int_0^1 \int_{-y}^{y} \int_0^{y^2-x^2} 1\,dz\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{-y}^{y} (y^2-x^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} y^2 \, dx - \int_{-y}^{y} x^2 \, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\underbrace{y^2 \cdot x \Big|_{-y}^{y}}_{y-(-y)} - \underbrace{\frac{x^3}{3} \Big|_{-y}^{y}}_{y^3/3 - (-y^3/3)} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(y^2 (2y) - \frac{2}{3} y^3 \right) dy =$$

$$2y^3 - \frac{2}{3} y^3$$

$$= \int_0^1 \frac{4}{3} y^3 \, dy = \frac{4}{3} \int_0^1 y^3 \, dy = \frac{4}{3} \frac{y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} .$$